



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A IX - A

**Problema 1.** Rezolvați ecuația  $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$  (unde  $[x]$  este partea întreagă a lui  $x$ , iar  $\{x\}$  este partea fracționară a lui  $x$ ).

**Soluție și barem** Se impun condițiile de existență  $[x] \neq 0$  și  $\{x\} \neq 0$  și scriem ecuația în forma

$$([x] - \{x\}) \left( 1 - \frac{1}{[x] \cdot \{x\}} \right) = 0 \text{ ----- 2p}$$

I.  $[x] = x \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{Z}$ . Cum  $\{x\} \in [0, 1) \Rightarrow \{x\} = 0$ , care nu convine ----- 1p

II.  $[x] \cdot \{x\} = 1$ . Cum  $\{x\} \in [0, 1) \Rightarrow [x] > 1 \Rightarrow [x] = n, \{x\} = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  ----- 2p

Cum  $x = [x] + \{x\}$ , obținem că mulțimea soluțiilor este  $S = \left\{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$  ----- 2p

**Problema 2.** Dacă  $a, b, c \in (0, \infty)$  și  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ , demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^3}{b+3c} + \frac{b^3}{c+3a} + \frac{c^3}{a+3b} \geq 1.$$

**Soluție și barem** Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică. Obținem:

$$\frac{16a^3}{b+3c} + a(b+3c) \geq 2\sqrt{\frac{16a^3}{b+3c} \cdot a(b+3c)} = 8a^2 \text{ ----- 3p}$$

Folosind și analoagele inegalității precedente, rezultă

$$\frac{a^3}{b+3c} + \frac{b^3}{c+3a} + \frac{c^3}{a+3b} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)}{4} \text{ ----- 2p}$$

Folosim  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$  ----- 1p

$$\text{Obținem } \frac{a^3}{b+3c} + \frac{b^3}{c+3a} + \frac{c^3}{a+3b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = 1 \text{ ----- 1p}$$

**Problema 3.** Se consideră paralelogramul  $ABCD$ . O dreaptă care nu conține punctul  $A$  intersectează dreptele  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  în punctele  $B_1, C_1$ , respectiv  $D_1$ . Arătați că dacă  $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD}$  și

$$\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ atunci } \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3}$$

**Soluție și barem**

Fie  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Rezultă că  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \vec{b}$  și  $\overrightarrow{AC} = \lambda_3 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  ----- 1p

$$\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}, \quad \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot \vec{a} + \lambda_3 \cdot \vec{b} \quad \text{----- 2p}$$

$$B_1, C_1 \text{ și } D_1 \text{ coliniare} \Leftrightarrow \text{Vectorii } \overrightarrow{B_1C_1} \text{ și } \overrightarrow{B_1D_1} \text{ sunt coliniari} \Leftrightarrow \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{-\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad \text{----- 3p}$$

$$\text{Ultima relație este echivalentă cu } \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3} \quad \text{----- 1p}$$

**Problema 4.** Vectorii  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  de modul 1 sunt situați în același semiplan limitat de o dreaptă care trece prin  $O$ . Arătați că  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| > 1$ .

**Soluție și barem** Fără a restrânge generalitatea presupunem că  $B \in \text{Int}(\widehat{AOC})$ .

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}, \quad |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \Rightarrow OAMC \text{ este romb, deci } (OM \text{ este bisectoarea lui } \widehat{AOC}) \quad \text{----- 2p}$$

$$\text{Rezultă că } m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{MOC}) < 90^\circ \quad \text{----- 1p}$$

$$\text{Ca urmare } m(\widehat{BOM}) < 90^\circ (1) \quad \text{----- 1p}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}, \quad OMPB \text{ paralelogram (2)} \quad \text{----- 1p}$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } OP > OB = 1 \quad \text{----- 1p}$$

$$\text{În concluzie } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = OP > 1 \quad \text{----- 1p}$$

**Notă:** Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A X-A

**Problema 1.**

*Soluție și barem*

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{z} \dots\dots\dots 1p$$

$$z^3 + z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 = \overline{z^3 + z^2 + z + 1} \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z + 1) = (\overline{z^2 + 1})(\overline{z + 1})$$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 1)(z + 1) = \left(\frac{1}{z} + 1\right)\left(\frac{1}{z^2} + 1\right) \Leftrightarrow (z + 1)(z^2 + 1)\left(1 - \frac{1}{z^3}\right) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$z_1 = -1, z_{2,3} = \pm i, z_4 = 1, z_{5,6} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}, \text{ de unde suma este } -1 \dots\dots\dots 2p$$

Se reprezintă în planul complex punctele de afixe  $z_1, \dots, z_6$ , după care se obține aria

$$S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

**Problema 2.**

*Soluție și barem*

a) Din  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$  rezultă  $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$

b) Inegalitatea se mai scrie

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x + \left(y - \frac{1}{2}\right) \ln y \geq 0$$

Dar din  $x + y = 1$  rezultă  $x - \frac{1}{2} = -\left(y - \frac{1}{2}\right)$  și inegalitatea de mai sus devine

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x}{y} \geq 0 \text{ (*)} \dots\dots\dots 1p$$

Dacă  $\frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow 0 < y \leq \frac{1}{2}$  deci  $\frac{x}{y} \geq 1 \rightarrow \ln \frac{x}{y} \geq 0$  deci se verifică (\*).....2p

Dacă  $0 < x \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \leq y < 1$  deci  $\frac{x}{y} \leq 1 \rightarrow \ln \frac{x}{y} \leq 0$  deci se verifică (\*).....2p



**Problema 3.**

**Soluție și barem**

Dacă  $z = r(\cos t + i \sin t)$ ,  $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

este o soluție a ecuației, atunci  $r^n (\cos nt + i \sin nt) + ar (\cos t + i \sin t) + 1 = 0$ , de unde obținem

$$r^n \cos nt + ar \cos t + 1 = 0, r^n \sin nt + ar \sin t = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Eliminând  $ar$  din cele două relații obținem  $r^n \sin(n-1)t - \sin t = 0 \dots\dots\dots 2p$

$$r = \sqrt[n]{\left| \frac{\sin t}{\sin(n-1)t} \right|} \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece  $|\sin(n-1)t| \leq (n-1)|\sin t| \Rightarrow r = |z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$

**Problema 4.**

**Soluție și barem**

a) Se demonstrează prin inducție  $P(k): \sqrt[k]{k!} \leq \frac{k}{2}, (\forall) k \in \mathbb{N}, k \geq 6$ .

$P(6): 6! < 3^6$  este adevărată; presupunem  $P(k)$ -adevărată și demonstrăm  $P(k+1)$ . Este suficient să demonstrăm  $2 \cdot k^k \leq (k+1)^k$ , care rescrisă devine  $2 \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$  și este adevărată conform inegalității lui Bernoulli.....4p

b) Din subpunctul a) rezultă  $\prod_{k=6}^n \sqrt[k]{k!} \leq \prod_{k=6}^n \frac{k}{2} = \frac{n!}{2^{n-5} \cdot 5!} \quad (1) \dots\dots\dots 1p$

Pentru  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  se verifică  $\sqrt[k]{k!} \leq \frac{k+1}{2}$ , deci:

$$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdot \sqrt[5]{5!} \leq \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2^5} \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

Din (1) și (2) deducem:  $1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n!} \leq \frac{6 \cdot n!}{2^n} \dots\dots\dots 1p$

**Notă:** Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



## Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

## CLASA A XI-A

**Problema 1.** Pentru fiecare număr natural  $n$  se consideră funcția

$$f_n: (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^n}.$$

- a) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -\frac{1}{4}$ .
- b) Să se arate că nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x)$ .
- c) Să se determine  $n$  pentru care există  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ .

**Soluție și barem.**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2} + \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} - \frac{1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \right) = \dots\dots\dots 2p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1-x} + 1)(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) } \text{Deoarece } \lim_{x \nearrow 0} f_3(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty \text{ și } \lim_{x \searrow 0} f_3(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f_2(x)}{x} = -\infty, \text{ rezultă că nu există } \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -\frac{1}{4}. \text{ Pentru } n \geq 3, \text{ avem } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x^{n-2}}. \text{ Această limită}$$

este  $-\infty$  dacă  $n$  este număr par și nu există dacă  $n$  este număr impar. Așadar limita  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$  există  
dacă și numai dacă  $n$  este număr par sau  $n = 1$ .  $\dots\dots\dots 2p$

**Problema 2.** Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{2a_n}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că:

- a) șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător;
- b)  $n \leq a_n^2 < n + \sqrt{n}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ;
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$ .



### Soluție și barem

a) Se arată, prin inducție, că  $a_n > 0$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ . De aici rezultă că  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2a_n} > 0$  oricare ar

fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător. ....3p

b)  $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2} > a_n^2 + 1$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , de unde rezultă că  $a_n^2 \geq n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$

(inducție).....1p

Se arată, tot prin inducție, că  $a_n^2 < n + \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $a_1^2 < 1 + \sqrt{1}$ ; din  $a_k^2 < k + \sqrt{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  rezultă că

$a_{k+1}^2 = a_k^2 + 1 + \frac{1}{4a_k^2} < k + \sqrt{k} + 1 + \frac{1}{4k} = k + 1 + \left(\sqrt{k} + \frac{1}{4k}\right) < k + 1 + \sqrt{k+1}$ . ....1p

c) Din relația de la punctul b), se obține  $1 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$ , de unde rezultă că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$ . ....2p

**Problema 3.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Să se demonstreze că, dacă  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ , unde

$n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $\frac{b_n}{2} = \frac{c_n}{3} = \frac{a_n - d_n}{4}$ .

### Soluție și barem

Evident,  $A^n \cdot A = A \cdot A^n$ , .....3p

deci  $5a_n + 3b_n = 5a_n + 2c_n$ ,  $2a_n + b_n = 5b_n + 2d_n$ ,  $5c_n + 3d_n = 3a_n + c_n$ ,  $2c_n + d_n = 3b_n + d_n$ , .....2p

de unde rezultă că  $\frac{b_n}{2} = \frac{c_n}{3} = \frac{a_n - d_n}{4}$ . ....2p

**Problema 4.** Fie  $n$  un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se consideră două matrice  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , astfel încât  $A$  să fie inversabilă și  $3AB = 2BA + I_n$ .

a) Să se determine matricea  $B$ , știind că  $n = 2$  și  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) Să se demonstreze că  $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$ .

c) Să se arate că  $\det(AB - BA) = 0$ .

### Soluție și barem

a)  $B = A$ . ....3p



$$\begin{aligned} \text{b) } \det(I_n - AB) &= \det(AA^{-1} - ABAA^{-1}) = \det(A(I_n - BA)A^{-1}) = \det(A)\det(I_n - BA)\det(A^{-1}) = \\ &= \det(AA^{-1})\det(I_n - BA) = \det(I_n - BA). \dots\dots\dots 2\text{p} \end{aligned}$$

$$\text{c) } 3AB = 2BA + I_n \Rightarrow 3AB - 3BA = I_n - BA \Rightarrow 3^n \det(AB - BA) = \det(I_n - BA) \quad (1)$$

$$3AB = 2BA + I_n \Rightarrow 2AB - 2BA = I_n - AB \Rightarrow 2^n \det(AB - BA) = \det(I_n - AB) \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că  $3^n \det(AB - BA) = 2^n \det(AB - BA)$ , deci  $\det(AB - BA) = 0$ .  $\dots\dots\dots 2\text{p}$

**Notă:** Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



## Olimpiada Națională de Matematică 2016 Etapă locală – Iași, 1 februarie 2016

### CLASA A XII-A

#### Problema 1.

Calculați  $\int_0^1 (e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt[3]{x}} + e^{\sqrt[4]{x}}) dx$ .

#### Soluție și barem

Notăm  $I_n = \int_0^1 e^{\sqrt[n]{x}} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  (facem convenția  $\sqrt[n]{x} = x$ ). Cu schimbarea de variabilă  $t = e^{\sqrt[n]{x}}$  obținem că  $I_n = \int_1^e n \ln^{n-1} t dt$ . (2p)

Integrând prin părți, deducem că  $I_n = n \left( t \ln^{n-1} t \Big|_1^e - \int_1^e t(n-1) \ln^{n-2} t \cdot \frac{1}{t} dt \right) = n(e - I_{n-1})$ ,  $\forall n \geq 2$ .

În plus,  $I_1 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ . (3p)

Folosind relația găsită,  $I_2 + I_3 + I_4 = 4e + I_2 - 3I_3 = -5e + 10I_2 = 15e - 20I_1 = 5(4 - e)$ . (2p)

#### Problema 2.

Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = \det(A + X) = 0\}$ .

a) Determinați două mulțimi  $K$  și  $L$ , părți stabile ale monoidului  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ , astfel încât  $K \cup L = M$ .

b) Este  $M$  stabilă în raport cu înmulțirea matricelor?

#### Soluție și barem

a) Condiția  $\det X = 0$  arată că o matrice din  $M$  are forma  $X = \begin{pmatrix} ax & x \\ ay & y \end{pmatrix}$ , unde  $a, x, y \in \mathbb{R}$ .

Atunci  $\det(A + X) = (ax + 6)(y + 1) - (ay + 3)(x + 2) = (a - 3)(x - 2y)$  și, din  $\det(A + X) = 0$ , deducem că  $a = 3$  sau  $x = 2y$ . (3p)

Mulțimile  $K = \left\{ \begin{pmatrix} 3x & x \\ 3y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$  și  $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2ay & 2y \\ ay & y \end{pmatrix} \mid a, y \in \mathbb{R} \right\}$  îndeplinesc cerințele problemei. (2p)

b)  $M$  nu este stabilă în raport cu înmulțirea matricelor: de exemplu,  $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \in K \subset M$ ,

$Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in L \subset M$ , însă  $XY = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 28 & 14 \end{pmatrix} \notin M$ . (2p)





### Problema 3.

Considerăm o funcție  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă, descrescătoare, astfel încât  $f(\pi) = 0$  și fie  $F$  o primitivă a sa. Demonstrați că

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos x \, dx \leq 0.$$

#### Soluție și barem

Observăm că  $I = \int_0^{2\pi} F(x) \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} F(x) (\sin x)' \, dx = F(x) \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx = - \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx$ . (3p)

Dacă  $x \in [0, \pi]$ , atunci  $f(x) \geq f(\pi) = 0$ , iar dacă  $x \in [\pi, 2\pi]$ , atunci  $f(x) \leq f(\pi) = 0$ . (2p)

Rezultă că  $I = - \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \sin x \, dx \leq 0$ , unde am ținut seama de semnul comun al funcțiilor  $f$  și  $\sin$  pe fiecare dintre intervalele  $[0, \pi]$  și  $[\pi, 2\pi]$ . (2p)

### Problema 4.

Spunem că un grup finit  $(G, \cdot)$  cu  $n$  elemente este *bun* dacă îndeplinește condițiile: (i)  $n$  nu este divizibil cu 4 și (ii) există două elemente distincte  $a$  și  $b$  ale lui  $G$ , diferite de elementul neutru  $e$  al grupului, astfel încât  $a^2 = b^2 = e$ .

a) Dați un exemplu de grup bun.

b) Dacă există un grup bun cu  $n$  elemente, arătați că  $n = 4k + 2$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ .

c) Demonstrați că un grup bun nu poate fi abelian.

*Gazeta Matematică 11/2015 (Supliment)*

#### Soluție și barem

a) De exemplu, grupul  $(S_3, \cdot)$  al permutărilor de ordin 3 este grup bun:  $|S_3| = 6 \not\equiv 4$ , iar transpozițiile (în număr de trei) sunt elemente de ordin 2 ale acestui grup. (2p)

b) Cum  $G$  conține elemente de ordin 2, din teorema lui Lagrange rezultă că  $G$  este de ordin par. Pe de altă parte,  $n$  nu este divizibil cu 4 și atunci există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $n = 4k + 2$ . (1p)

c) Dacă, prin absurd,  $ab = ba$ , ar rezulta că  $H = \{e, a, b, ab\}$  este subgrup al lui  $G$ . (3p)

Cum  $H$  este subgrup de ordin 4 al lui  $G$ , este contrazisă teorema lui Lagrange. (1p)

**Notă:** Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se vor puncta corespunzător.